# Clase práctica: independencia lineal

1. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}-$ espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente. Se definen:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 + 2v_3 \\ w_2 &= 3v_2 - v_3 \\ w_3 &= 2v_1 + v_2 - v_3 \end{aligned}$$

Analizar si el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

Planteamos una combinación lineal de $w_1, w_2, w_3$ igualada a $0_{\mathbb{V}}$:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0_{\mathbb{V}}$$

Si la única opción es que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$, entonces el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es LI. Si existen $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ no todos nulos, entonces el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es LD. Veamos que sucede en este caso:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0_{\mathbb{V}}$$

$$\lambda_1(v_1 + v_2 + 2v_3) + \lambda_2(3v_2 - v_3) + \lambda_3(2v_1 + v_2 - v_3) = 0_{\mathbb{V}}$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3)v_1 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3)v_2 + (2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)v_3 = 0_{\mathbb{V}}$$

Como el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI tenemos que

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema también puede escribirse en su forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llamemos $A$ a la matriz del sistema, esto es, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Tenemos las siguientes opciones:

- El sistema tiene única solución si y sólo si $det(A) \neq 0$. En este caso, el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ resulta linealmente independiente.
- Si $det(A) = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones, entonces existen soluciones no triviales del sistema y el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ resulta linealmente dependiente.

Calculemos el determinante de $A$:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -3 - (-1) + 2(-1-6) = -16 \neq 0$$

Por lo tanto el sistema tiene única solución $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$ y el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es LI.

2. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto

$$\{1+ax+x^2-x^3, -1+2x+ax^2+2x^3, 4x+3x^2+x^3\} \subseteq P_3$$

es linealmente independiente.

Planteamos una combinación lineal de los polinomios de este conjunto igualada al polinomio nulo de $P_3$:

$$\lambda_1(1+ax+x^2-x^3)+\lambda_2(-1+2x+ax^2+2x^3)+\lambda_3(4x+3x^2+x^3)=0_{P_3}$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)+(a\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3)x+(\lambda_1+a\lambda_2+3\lambda_3)x^3+(-\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)x^3=0_{P_3}$$

Luego

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2=0 \\ a\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ \lambda_1+a\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

Vamos a triangular para darnos cuenta para cuales valores de $a$ el sistema tiene única solución y para cuales tiene infinitas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 4 \\ 1 & a & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2-aF_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4+F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2+a & 4 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2+a & 4 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3-(2+a)F_2 \\ F_4-(a+1)F_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(2+a) \\ 0 & 0 & 3-(a+1) \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que este sistema tiene única solución $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ y $\lambda_3=0$ si y sólo si $2-a\neq 0$. Esto es, el conjunto $\{1+ax+x^2-x^3, -1+2x+ax^2+2x^3, 4x+3x^2+x^3\}$ es LI si y sólo si $a\neq 2$.

3. Analizar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes o lineamente dependientes:

   *a*) $\{sen(x), sen(2x)\}$
   *b*) $\{2sen(x)-3sen(2x), sen(x)+5sen(2x)\}$

   *a*) Podemos utilizar el wronskiano para determinar si este conjunto de funciones es LI:

$$W(x)=det\begin{pmatrix} sen(x) & sen(2x) \\ cos(x) & 2cos(2x) \end{pmatrix}$$

Si $W(x)\neq 0$ para algún $x\in\mathbb{R}$, entonces el conjunto $\{sen(x), sen(2x)\}$ será LI. Consideremos $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$W(\frac{\pi}{2})=det\begin{pmatrix} sen(\frac{\pi}{2}) & sen(\pi) \\ cos(\frac{\pi}{2}) & 2cos(\pi) \end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=-2\neq 0$$

Por lo tanto, $\{sen(x), sen(2x)\}$ es LI.

*b*) Presentaremos dos formas de analizar si el conjunto

$$\{2sen(x) - 3sen(2x), sen(x) + 5sen(2x)\}$$

es LI.

Una primera posibilidad es utilizar nuevamente el wronskiano:

$$W(x) = det \begin{pmatrix} 2sen(x) - 3sen(2x) & sen(x) + 5sen(2x) \\ 2cos(x) - 6cos(2x) & cos(x) + 10cos(2x) \end{pmatrix}$$

Consideremos $x = \frac{\pi}{2}$.

$$W(\frac{\pi}{2}) = det \begin{pmatrix} 2sen(\frac{\pi}{2}) - 3sen(\pi) & sen(\frac{\pi}{2}) + 5sen(\pi) \\ 2cos(\frac{\pi}{2}) - 6cos(\pi) & cos(\frac{\pi}{2}) + 10cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} = -26 \neq 0$$

Luego, el conjunto $\{2sen(x) - 3sen(2x), sen(x) + 5sen(2x)\}$ es LI.

Otra posibilidad es plantear una combinación lineal igualada a la función nula, entonces tenemos que

$$\lambda_1(2sen(x) - 3sen(2x)) + \lambda_2(sen(x) + 5sen(2x)) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(2\lambda_1 + \lambda_2)sen(x) + (-3\lambda_1 + 5\lambda_2)sen(2x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Como el conjunto $\{sen(x), sen(2x)\}$ es LI,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene única solución $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ ya que $det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 13 \neq 0$.

Por lo tanto, el conjunto $\{2sen(x) - 3sen(2x), sen(x) + 5sen(2x)\}$ es LI.